2.9.20 Logaritmické rovnice II

Předpoklady: 2919

Pedagogická poznámka: Celá hodina je zaměřena na postupy, při kterých se rovnice upravují do tvaru $\log_a(výraz1) = \log_a(výraz2)$. U žáků, kteří mají problémy se vzorci pro logaritmy, trvám na přepsání vzorců do arzenálu.

Př. 1: Vyřeš rovnice:

a) $\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$ b) $\dfrac{\log_4 x - 1}{0{,}5 + \log_4 3} = 1$

c) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$

a) $\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$ Podmínky: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

Problém: Na pravé straně potřebujeme jenom jeden logaritmus $\Rightarrow$ pomocí pravidel pro počítání s logaritmy musíme vytvořit jediný logaritmus.

$\log_3(2x-1) = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$

$\log_3(2x-1) = \log_3 4^2 - \log_3 2^3$

$\log_3(2x-1) = \log_3 \dfrac{4^2}{2^3} = \log_3 \dfrac{2^4}{2^3} = \log_3 2$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.

$2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$x = \dfrac{3}{2}$ - vyhovuje podmínce $\Rightarrow$ $K = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $\dfrac{\log_4 x - 1}{0{,}5 + \log_4 3} = 1$ Podmínka: $x > 0$.

Vynásobením odstraníme zlomek, pak vytvoříme na obou stranách jeden logaritmus.

$\log_4 x - 1 = 0{,}5 + \log_4 3$

$\log_4 x - \log_4 4 = \log_4 4^{0{,}5} + \log_4 3$

$\log_4 \dfrac{x}{4} = \log_4 2 \cdot 3$

$\dfrac{x}{4} = 6$

$x = 24$ $K = \{24\}$

c) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$ Podmínky: $x > 1$, $x > -1$.

$\log_3[(x-1)(x+1)] = \log_3 3$

$(x+1)(x-1) = 3$

$x^2 - 1 = 3$

$x^2-4=0$
$(x-2)(x+2)=0$
$x_1=2$ $x_2=-2$ - nevyhovuje podmínce. $K=\{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\log_6\sqrt{x+16}+\log_6\sqrt{x}=1$

Podmínky: $x>-16$, $x>0$
Problém: Je možné logaritmy na levé straně spojit do jednoho logaritmu, jedničku na pravé napsat pomocí logaritmu a pak odlogaritmovat
$\log_6\sqrt{x+16}+\log_6\sqrt{x}=1$
$\log_6\left(\sqrt{x+16}\cdot\sqrt{x}\right)=\log_6 6$
$\Rightarrow$ zůstávají odmocniny, museli bychom umocnit a pak dělat zkoušku.
Lepší možnost: logaritmy umožňují „sundat“ mocniny (a tedy i odmocniny) $\Rightarrow$ vyhneme se zkouškám.
$\log_6\sqrt{x+16}+\log_6\sqrt{x}=1$
$\log_6\left[(x+16)^{\frac{1}{2}}\right]+\log_6\left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]=1$
$\frac{1}{2}\log_6(x+16)+\frac{1}{2}\log_6 x=1 \quad /\cdot 2$
$\log_6(x+16)+\log_6 x=2$
$\log_6 x(x+16)=\log_6 6^2$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.
$x(x+16)=36$
$x^2+16x-36=0$
$(x+18)(x-2)=0$
$x_1=-18$ - nevyhovuje podmínce $x_2=2$ $K=\{2\}$

Př. 3: Vyřeš rovnice:
a) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$
b) $\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2\frac{1}{x^2}+\log_2\frac{x^2}{3}$

a) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$ Podmínka: $x>0$.
$\log\left(2x^2\right)^2+\log\left(x^3\right)^4+\log 3^2=\log\left(x^4\right)^3+\log 10^2+\log x^2$
$\log\left(4x^4\cdot x^{12}\cdot 9\right)=\log\left(x^{12}\cdot 100\cdot x^2\right)$
$4x^4\cdot x^{12}\cdot 9=x^{12}\cdot 100\cdot x^2$
$36x^2=100$
$x^2=\frac{25}{9} \Rightarrow x_1=\frac{5}{3},\ x_2=-\frac{5}{3}$ (tento kořen zakazují podmínky)
$K=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

b) $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x^2 - \log_2 3x^3 = \log_2 \frac{1}{x^2} + \log_2 \frac{x^2}{3}$ Podmínka: $x > 0$.

$\log_2 \frac{\sqrt{x} \cdot 2x^2}{3x^3} = \log_2 \frac{x^2}{x^2 3}$ - odlogaritmujeme a pokrátíme.

$\frac{\sqrt{x} \cdot 2}{3x} = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt{x} \cdot 2 \quad /^2$ obě strany jsou kladné $\Rightarrow$ nemusíme dělat zkoušku.

$x^2 = 4x$ $x > 0 \Rightarrow$ můžeme dělit x

$x = 4$ $K = \{4\}$

Poznámka: Oba předchozí příklady se často řeší i jiným způsobem, který si ukážeme v příští hodině.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$ b) $\frac{\log_\pi (10+3x)}{\log_\pi (x+4)} = 2$

a) $\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$ Podmínky: $\frac{x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow$ radši vyzkoušíme až vypočtené hodnoty.

$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = -2$

$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = \log_2 2^{-2}$

$\log_2 \frac{x+2}{2x-1} = \log_2 \frac{1}{4}$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.

$\frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{4} \quad / \cdot 4(2x-1)$

$4(x+2) = 2x - 1$

$4x + 8 = 2x - 1$

$2x = -9$

$x = -\frac{9}{2}$ - ještě vyzkoušet podmínku $\frac{x+2}{2x-1} = \frac{-4,5+2}{2 \cdot (-4,5) - 1} = \frac{-2,5}{-10} > 0$

$K = \left\{ -\frac{9}{2} \right\}$

b) $\frac{\log_\pi (10+3x)}{\log_\pi (x+4)} = 2$

Podmínky:

- Vnitřky logaritmů: $10 + 3x > 0 \Rightarrow x > -\frac{10}{3}$, $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$.
- Jmenovatel zlomku: $\log_\pi (x+4) \neq 0 \Rightarrow x + 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$.

Problém: Nemůžeme udělat vlevo jeden logaritmus, nemáme vzorec, který by dělat z podílu logaritmů jeden logaritmus.

$\Rightarrow$ Vynásobíme rovnici jmenovatelem, abychom druhý logaritmus dostali na pravou stranu.

$$\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)}=2 \quad /\cdot \log_\pi(x+4)$$

$$\log_\pi(10+3x)=2\log_\pi(x+4)$$

$$\log_\pi(10+3x)=\log_\pi(x+4)^2$$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.

$$10+3x=(x+4)^2$$

$$10+3x=x^2+8x+16$$

$$0=x^2+5x+6$$

$$(x+2)(x+3)=0$$

$x_1=-2$ - vyhovuje podmínce $\qquad$ $x_2=-3$ - nevyhovuje podmínce

$K=\{-2\}$

Př. 5: Petáková:
strana 35, cvičení 11 b), d), f), g), h), i)
strana 35, cvičení 12 c)
strana 35, cvičení 13 a), c)

Shrnutí: Rovnice, které neobsahují mocniny logaritmů s neznámou, můžeme upravit na tvar $\log_a(\mathit{výraz}1)=\log_a(\mathit{výraz}2)$ a pak řešit odlogaritmováním.